Elektronenwellen und Beugung

de-Broglie-Wellenlänge, Elektronenkanone, Beugungsröhre, Graphit, Davisson-Germer

Das können Sie nach diesem Skript

– die de-Broglie-Beziehung begründen und anwenden
– die Elektronenwellenlänge aus der Beschleunigungsspannung herleiten
– die Beugungsröhre von der Elektronenstrahlröhre unterscheiden
– Ringe und ihre Spannungsabhängigkeit deuten

Lernskript zur Vorbereitung auf das Vorabitur am 06.11.2026 · Gymnasium Westerstede, Niedersachsen
Grundlage: Kerncurriculum Physik (Niedersachsen 2022), Unterrichtsmaterialien www.physik.gym-wst.de, Aufgabenpool der Länder (IQB)

Inhalt

1 Die Hypothese 3
2 Von der Spannung zur Wellenlänge 3
3 Geometrie der Beugungsröhre 4
3.1 Optische Analogie und λ-v-Zusammenhang 4
4 Zwei Röhren, zwei Zwecke 4
5 Weitere Belege 5
6 Experiment: Elektronenbeugung am Graphit 5
7 Aufgaben 5
8 Typische Fehler 6
9 Wiederholung 6

1 Die Hypothese

de Broglie 1924: Wenn Licht als Welle **und** als Teilchen auftritt, dann muss auch ein Elektron eine Welle haben – mit derselben Verknüpfung $p = h/\lambda$:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{1}$$

de Broglie übertrug die Symmetrie des Lichts auf die Materie: Wenn Licht je nach Experiment als Welle oder als Teilchen erscheint, dann sollte auch ein Elektron eine Wellenlänge haben. Die Hypothese ist nicht aus der klassischen Mechanik ableitbar; sie wird durch Beugungs- und Interferenzversuche geprüft.

Merksatz
Je größer der Impuls, desto kürzer die Welle. Für makroskopische Körper ist λ so winzig, dass keine Beugung beobachtbar ist (ein 1-g-Körper bei 1 m/s: $\lambda \approx 6{,}6 \cdot 10^{-31}$ m).

2 Von der Spannung zur Wellenlänge

Herleitung
Elektronenwellenlänge aus der Beschleunigungsspannung

1. Energiebilanz in der Elektronenkanone:

$$eU = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} \tag{2}$$

2. Impuls: $p = m_e v = \sqrt{2 m_e e U}$.
3. de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e U}} \tag{3}$$

4. Zahlenwert einsetzen (h, m_e, e):

$$\lambda = \frac{1{,}226 \text{ nm}}{\sqrt{\frac{U}{\text{V}}}} \tag{4}$$

5. Gültig für U bis etwa 10 kV; darüber wird der relativistische Impuls messbar größer.

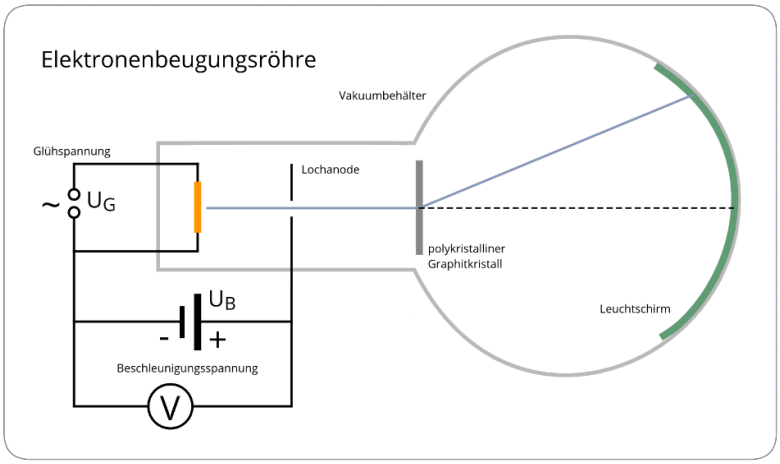


Abbildung 1: Elektronenbeugungsröhre aus dem Schulmaterial. Quelle: Schulseite.

Aus Ringradius und bekanntem Netzebenenabstand lässt sich umgekehrt λ bestimmen; die beiden Ringe gehören zu verschiedenen Netzebenenscharen desselben Graphits.

U	λ **(nicht relativistisch)**	**Kontrolle** $1{,}226/\sqrt{\frac{U}{\text{V}}}$
1 kV	38,8 pm	38,8 pm

4 kV	19,4 pm	19,4 pm
10 kV	12,3 pm	12,3 pm

3 Geometrie der Beugungsröhre

An den Netzebenen des Graphits wird gebeugt (Bragg). Der einfallende Strahl trifft unter dem Glanzwinkel θ auf die Netzebene; der gebeugte Strahl läuft unter 2θ zur Einfallsrichtung weiter. Auf dem Schirm im Abstand a liegt der Ringradius r, also gilt $\tan(2\theta) = r/a$. Für kleine Winkel ist $\tan(2\theta) \approx \sin(2\theta) \approx 2\theta$, damit $2\theta \approx r/a$ und

$$\sin(\theta) \approx \theta \approx \frac{r}{2a} \quad \text{und} \quad 2d\sin(\theta) = n\lambda \tag{5}$$

Setzt man $\sin(\theta)$ in die Bragg-Bedingung ein, folgt für das Maximum erster Ordnung ($n = 1$)

$$2d \cdot \frac{r}{2a} = \lambda \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a\lambda}{d} \tag{6}$$

Mit $\lambda = h/\sqrt{2m_e eU}$ wird daraus

$$r^2 = \frac{a^2 h^2}{2m_e e d^2} \cdot \frac{1}{U} \tag{7}$$

Das ist die Abituraufgabe in Reinform: r^2 über $1/U$ auftragen ergibt eine Gerade, aus deren Steigung d folgt.

Achtung – typische Fehlerquelle
d ist der **Netzebenenabstand** des Graphits (etwa 0,21 nm), a der Abstand Graphit–Schirm. Beide sind Gerätegrößen, keine Messgrößen.

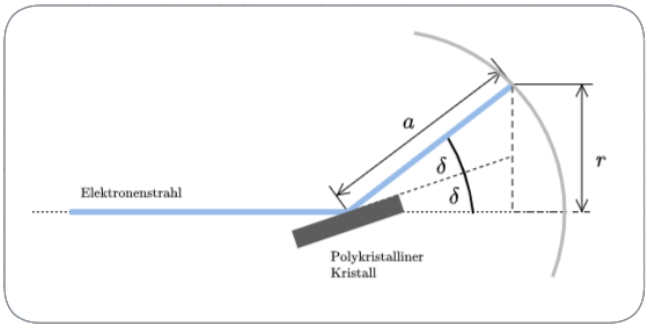


Abbildung 2: Reflexion am Kristall und Bragg-Bedingung aus dem Schulmaterial. Quelle: Schulseite.

Bei festem Winkel wächst der Zusatzweg $2d\sin(\theta)$ mit dem Netzebenenabstand; genau darauf beruht die Auswertung über die Steigung von r^2 über $1/U$.

3.1 Optische Analogie und λ-v-Zusammenhang

Die Ringe am Graphit sind das Analogon zum Beugungsbild von Licht an einem Transmissionsgitter: Die Netzebenen wirken wie die Gitterlinien, der Ringradius entspricht dem Beugungswinkel. Deshalb lassen sich die optischen Begriffe (Gangunterschied, Maximum, Wellenlänge) unverändert auf die Elektronen übertragen.
Aus $eU = \frac{1}{2}m_e v^2$ folgt $v = \sqrt{2eU/m_e}$ und mit $\lambda = h/(m_e v)$:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} \quad \Rightarrow \quad \lambda \sim \frac{1}{v} \tag{8}$$

Setzt man das in $r = a\lambda/d$ ein, ergibt sich $r^2 \sim 1/U$. Die Messung bestätigt also sowohl $\lambda \sim 1/v$ als auch die Bragg-Beziehung.

4 Zwei Röhren, zwei Zwecke

Röhre	Zweck	Kennzeichen
Elektronenstrahlröhre	Ablenkung, „Fernsehröhre“, Feldmessungen	Ablenkplatten, Leuchtschirm; kein Beugungsbild

Elektronenbeugungsröhre	Nachweis der Materiewelle	Graphitfolie im Strahlweg, Ringe auf dem Schirm

Merksatz
Nur die Beugungsröhre zeigt Interferenz. Die Elektronenstrahlröhre zeigt, dass Elektronen **Teilchen** mit Ladung sind – sie sagt über die Wellennatur nichts aus.

5 Weitere Belege

Versuch	Aussage
Davisson-Germer (1927)	Elektronen an Nickelkristallen zeigen Maxima unter Winkeln, die zur Bragg-Bedingung passen
Einzelelektronen	Bei sehr kleiner Intensität treffen einzelne Elektronen punktuell ein; das Interferenzmuster baut sich mit der Zeit auf
Neutronen-, Atominterferenz	Die Beziehung $\lambda = h/p$ gilt für alle Teilchen

6 Experiment: Elektronenbeugung am Graphit

Experiment
Aufbau. Evakuierte Röhre, Glühkathode, Anode mit Lochblende, Graphitfolie, Leuchtschirm, regelbare Hochspannung.
Durchführung. U von 2 kV bis 6 kV erhöhen, Ringdurchmesser auf dem Schirm messen (Radius r).
Beobachtung. Zwei konzentrische Ringe; beide werden mit steigender Spannung **kleiner**.
Erklärung. Höhere Spannung → größerer Impuls → kleinere Wellenlänge → kleinere Beugungswinkel.
Auswertung. r^2 gegen $1/U$: Gerade mit Steigung $a^2h^2/(2m_e e d^2)$.
Bedeutung. Direkter Nachweis der Materiewelle; liefert h bzw. d.
Fehler und Sicherheit. Beschleunigungsspannung und Ringradius sind die Messgrößen; der geometrische Aufbau der Röhre wirkt systematisch. Hochspannung nur im geschlossenen Gerät, Röhre nicht öffnen.

7 Aufgaben

Aufgabe 1 AFB II 10 P.
Elektronen werden mit 4,0 kV beschleunigt.

1. Berechnen Sie die Wellenlänge.
2. Berechnen Sie die Frequenz, die einem Photon gleicher Energie entspricht, und vergleichen Sie.

Lösung
(1) $\lambda = \frac{1{,}226\ \text{nm}}{\sqrt{4000}} = 0{,}0194\ \text{nm} = 19{,}4\ \text{pm}$.
(2) $E = eU = 4{,}0$ keV, also $f = E/h = 9{,}7 \cdot 10^{17}$ Hz und $\lambda_{\text{Photon}} = c/f = 0{,}31$ nm. Das Elektron ist mit 19,4 pm etwa 16-mal kürzer. Der Unterschied folgt aus den verschiedenen Energie-Impuls-Beziehungen: $E = p^2/(2m_e)$ beim Elektron, $E = pc$ beim Photon.

Aufgabe 2 AFB II 12 P.
In einer Beugungsröhre ($a = 0{,}135$ m) wird der innere Ring gemessen (Beispieldaten einer didaktischen Messreihe; die Quelle nennt keine Zahlen):

U in kV	3,0	4,0	5,0	6,0

r in mm	14,2	12,3	11,0	10,0

1. Zeigen Sie, dass $r^2 \sim 1/U$ gilt.
2. Bestimmen Sie d.

Lösung
(1) r^2 gegen $1/U$ ergibt eine Gerade durch den Ursprung (Steigung $M = 0{,}6086$ m²V). Das folgt aus der hergeleiteten Beziehung: $r^2 = \frac{a^2 h^2}{2 m_e e d^2} \cdot 1/U$.
(2) $d = \frac{ha}{\sqrt{2 m_e e M}} = 2{,}1 \cdot 10^{-10}$ m, also $d \approx 0{,}21$ nm – der Literaturwert für Graphit.

Aufgabe 3 AFB III 12 P.
Beurteilen Sie, ob die Elektronenbeugung den Welle-Teilchen-Dualismus „beweist“, und vergleichen Sie sie mit dem Photoeffekt.

Lösung
Die Beugung zeigt die Wellennatur: Elektronen erzeugen ein Interferenzmuster mit $\lambda = h/p$. Der Photoeffekt zeigt die Teilchennatur des Lichts: Energie wird in Portionen hf übertragen. Beide Versuche widerlegen nicht die jeweils andere Seite, sondern zeigen, dass dieselbe Größe je nach Experiment als Welle oder als Teilchen beschrieben werden muss. „Beweis“ ist zu stark; die Experimente sind Belege für ein Modell, das beide Aspekte enthält.

8 Typische Fehler

Fehler	Richtig
$\lambda = h/(mv)$ mit v aus U ohne Wurzel	$v = \sqrt{2eU/m_e}$
Beugungs- und Strahlröhre gleichgesetzt	nur die Beugungsröhre zeigt Ringe
Ringradius und Ringdurchmesser verwechselt	r ist der Radius; $2r$ der Durchmesser
r gegen U auftragen	r^2 gegen $1/U$ ergibt eine Gerade
relativistische Effekte ignorieren	über 10 kV korrigieren oder anmerken

9 Wiederholung

Kern	Formel
de Broglie	$\lambda = h/p$
Impuls aus Spannung	$p = \sqrt{2 m_e e U}$
Wellenlänge aus Spannung	$\lambda = 1{,}226\ \text{nm}\ /\sqrt{U/\text{V}}$
Bragg	$2d \sin(\theta) = n\lambda$
Röhrengeometrie	$r = a\lambda/d$
Auswertung	r^2 über $1/U$, Steigung $a^2 h^2/(2 m_e e d^2)$

Verstehen, nicht auswendig: warum höhere Spannung kleinere Ringe ergibt; warum dasselbe Elektron punktförmig auftrifft und trotzdem interferiert; warum die Formel nur bis etwa 10 kV gilt.

Prüfungsrelevanz
Das musst du können:
- **erklären**, warum ein Elektron eine Wellenlänge hat und wann Beugung beobachtbar wird;
- **herleiten**: $\lambda = h/\sqrt{2 m_e e U}$ aus Energie- und Impulsbilanz;
- **berechnen**: Wellenlänge aus U, Ringradius aus λ und umgekehrt d aus r^2-$1/U$;

- **begründen**, warum höhere Spannung kleinere Ringe ergibt;
- **skizzieren**: Bragg-Geometrie an zwei Netzebenen.

Quellen (Abruf 2026-11-02).

- Elektronenwellen/Beugungsröhre: https://www.physik.gym-wst.de/docs/d13/13quantenobjekte/03elektronenwellen/docs.md
- Kerncurriculum Physik Niedersachsen 2022: https://cuvo.nibis.de/
- CODATA 2018 für h, m_e, e.
- Abbildungen: Unterrichtsmaterialien der Schulwebsite (`05_Grafiken/schule/`).